Chap Fractions : Addition, soustraction et comparaison

I. Quotient de deux nombres relatifs

Définition
Le quotient de a par b (avec b≠0) est **le** nombre q qui, multiplié par b, donne a.

On le note $q=\frac{a}{b}=a\div b$ Donc b × q = a.

Si a et b sont des nombres entiers alors $\frac{a}{b}$ est une fraction.

Exemple

$\frac{7}{3}$ est le quotient de 7 par 3 et $3\times\frac{7}{3}=7$

Ex 2 p 39

II. Quotients égaux

Propriété (admise)
On ne change pas la valeur d'un nombre en écriture fractionnaire en multipliant ou en divisant par un même nombre non nul le numérateur et le dénominateur.

$\frac{a}{b}=\frac{a\times k}{b\times k}$ et $\frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}$ avec $k\neq 0$, $m\neq 0$ et $b\neq 0$

Démonstration 1

Exemples
$\frac{3,5}{4}=\frac{3,5\times 2}{4\times 2}=\frac{7}{8}$ $\frac{-63}{27}=\frac{-63\div 3}{27\div 3}=\frac{21}{9}$

Cas particuliers

- $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$ et $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$ avec $b\neq 0$
- $\frac{a}{a}=1$ avec $a\neq 0$

  $\frac{0}{b}=0$ avec $b\neq 0$
- $\frac{a}{1}=a$

Démonstration 2

Ex 4 p 39 Ex 17, 20 p 44
Ex 22, 23, 24 p 44

III. Simplification de fractions

Définition
Simplifier une fraction, c'est écrire une fraction qui lui est égale avec un numérateur et un dénominateur plus petits.

Pour simplifier, on peut utiliser les critères de divisibilité.

Exemples
Simplification de fractions

$$\frac{30}{54}=\frac{5\times6}{9\times6}=\frac{5}{9}$$ $$\frac{-63}{27}=\frac{-9\times7}{9\times3}=\frac{7}{3}$$ $$\frac{-72}{32}=-\frac{9\times8}{4\times8}=-\frac{9}{4}$$

Ex 6 p 39, ex 21 p 44

IV. Egalité des produits en croix

Propriété

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ alors a×d = b×c avec b≠0 et d≠0.

Et réciproquement

Si a×d = b×c alors $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ avec b≠0 et d≠0.

Démonstration 3

Exemples

Les fractions sont-elles égales ?

$\frac{26}{39}$ et $\frac{6}{9}$

26×9 = 234

36×6 = 234 donc $\frac{26}{39}=\frac{6}{9}$

$\frac{23}{44}\, et\, \frac{3}{5}$

23×5 = 115

44×3 = 132 donc $\frac{23}{44}\neq\frac{3}{5}$

Ex 8 p 39
Ex 25 p 44

Calculer le nombre manquant

$$\frac{5}{11}=\frac{7}{x}$$

$$x=\frac{7\times11}{5}=15{,}4$$

$$\frac{13}{2}=\frac{y}{7}$$

$$y=\frac{13\times7}{2}=45{,}5$$

Ex 26, 27 p 44
Ex 62 p 49

V. Comparaison de fractions

Propriétés

Un nombre négatif est plus petit qu'un nombre positif.

De deux nombres positifs, le plus petit est celui qui a la plus petite distance à zéro.

De deux nombres négatifs, le plus petit est celui qui a la plus grande distance à zéro.

Exemples

$$-\frac{3}{4}<\frac{10}{3}$$ $$\frac{2}{7}<\frac{5}{7}$$ $$-\frac{7}{5}<-\frac{4}{5}$$

Réduction au même dénominateur pour comparer deux écritures fractionnaires

$$\frac{3}{7}=\frac{3\times9}{7\times9}=\frac{27}{63}$$ $$\frac{4}{9}=\frac{4\times9}{9\times7}=\frac{28}{63}$$

27 < 28 donc $\frac{27}{63}<\frac{28}{63}$ donc $\frac{3}{7}<\frac{4}{9}$

Ex 12 p 41
Ex 32, 33 p 45,
Pb Ex 66, 68 p 49

VI. Additions et soustractions

I.1) Lorsque les fractions ont le dénominateur

Propriétés (admises)
Pour additionner (ou soustraire) des fractions de même dénominateur :

- On additionne (ou on soustrait) les numérateurs.
- On garde le dénominateur commun.

$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}$ et $\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}$ avec $d \neq 0$

Démonstration 4

Exemples

$$\frac{4}{5}+\frac{7}{5}=\frac{4+7}{5}=\frac{11}{5}$$

$$\frac{13}{21}-\frac{20}{21}=\frac{13-20}{21}=\frac{-7}{21}=\frac{-1}{3}$$ on n'oublie pas de simplifier

Ex 14 p 43

I.2) Lorsque les dénominateurs sont différents

Activité 4 et 5 p 37

Méthode
Pour additionner ou soustraire des nombres en écriture fractionnaire de dénominateurs différents on commence par les mettre au même dénominateur.

Exemples

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{8}=\frac{3\times2}{4\times2}-\frac{5}{8}=\frac{6}{8}-\frac{5}{8}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{13}{3}-\frac{11}{5}=\frac{13\times5}{3\times5}-\frac{11\times3}{5\times3}=\frac{65}{15}-\frac{33}{15}=\frac{32}{15}$$

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{5\times2}{6\times2}+\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{19}{12}$$

Ex 37, 38, 39, 40, 41, 43 p 45
Ex 16 p 43
Problèmes :
Ex 44 p 45,
Ex 50, 52, 54, 57 p 48
Ex 67 p 49

Démonstration 1

$$q=\frac{a}{b}$$ donc a = b×q

on multiplie les deux membres de l'égalité par k. On obtient a×k = (b×q)×k donc a×k = (b×k)×q

et donc $$q=\frac{a\times k}{b\times k}$$

Conclusion : $$\frac{a}{b}=\frac{a\times k}{b\times k}$$

Démonstration 2

$$\frac{-a}{b}=\frac{-a\times -1}{b\times -1}=\frac{a}{-b}$$

$$\frac{-a}{b}=\frac{-1\times a}{b}=-\frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{-b}=\frac{a\times -1}{b\times -1}=\frac{a}{b}$$

Démonstration 3

1° Démontrons que : $\boxed{\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ alors } a\times d = b\times c}$

Quand on compare deux quotients, il peut être intéressant de les mettre au même dénominateur.

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times d}{b\times d}$$ et $$\frac{c}{d}=\frac{c\times b}{d\times b}$$

Hypothèse de départ : $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$ donc $$\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{c\times b}{d\times b}$$

Ces deux quotients sont égaux et ont le même dénominateur donc ils ont le même numérateur.
Donc a×d = b×c.

2° Démontrons que : $\boxed{\text{Si } a\times d = b\times c \text{ alors } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$

On sait que $$\frac{a}{b}=\frac{a\times d}{b\times d}$$

Hypothèse de départ : a×d = b×c

Donc $$\frac{a}{b}=\frac{b\times c}{b\times d}$$

et donc en simplifiant $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Démonstration 4

Par définition du quotient : $$\frac{a}{d}\times d=a$$ et $$\frac{b}{d}\times d=b$$

Donc $$\frac{a}{d}\times d+\frac{b}{d}\times d=a+b$$ en factorisant on obtient $$\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d}\right)\times d=a+b$$

Or par définition $$\frac{a+b}{d}\times d=a+b$$

Donc par unicité $$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}$$